

# Кодирование данных в терминах ориентированных графов в спайковых нейронных сетях

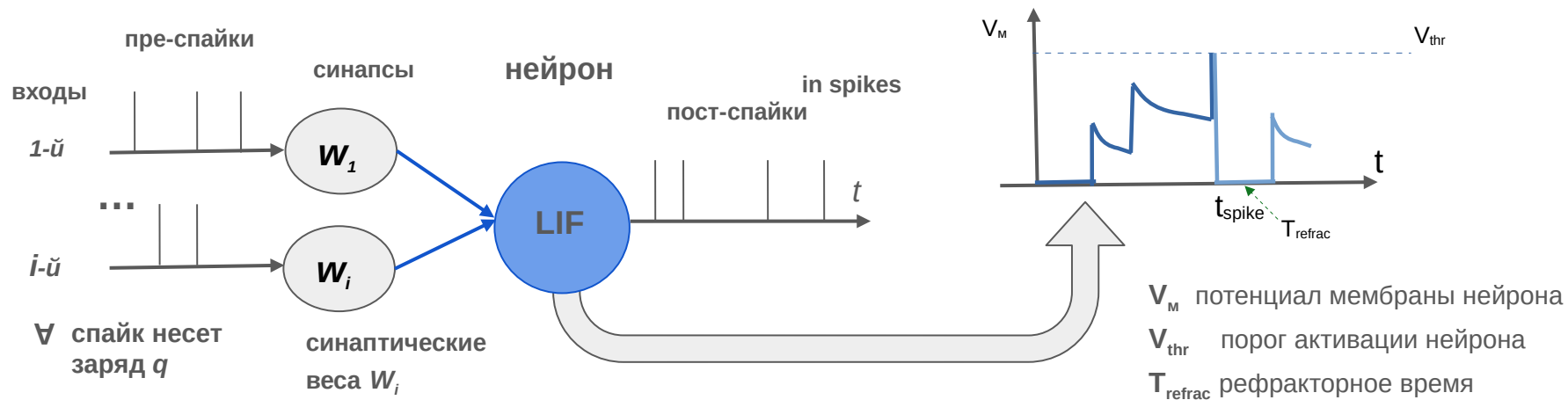
Я.П. Ивина<sup>1</sup>, А.О. Серенко<sup>1</sup>, М.Ю. Христинченко<sup>2</sup>, Р.Б. Рыбка<sup>1</sup>, В.А. Ильин<sup>1,2,3</sup>

<sup>1</sup> НИЦ «Курчатовский институт», Москва

<sup>2</sup> МФТИ, Долгопрудный

<sup>3</sup> ИТМО, Санкт-Петербург

# Спайковый нейрон *Leaky-Integrate-and-Fire* (LIF) это электростатическая модель.



В LIF модели мембрана нейрона это

параллельно соединённые **конденсатор** (ёмкость  $C_{mem}$ ) и **резистор** (сопротивление  $R_{mem}$ ):

1) конденсатор обеспечивает скачкообразное увеличение потенциала мембраны в момент прихода  $k$ -го спайка

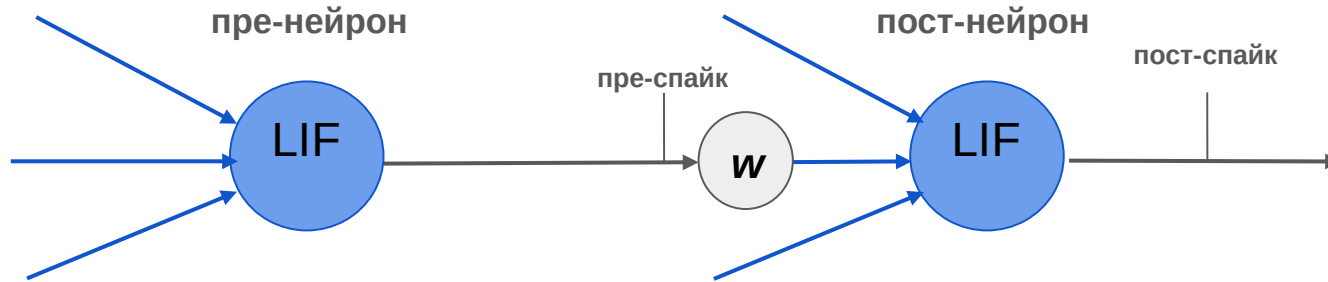
$$\Delta V_{mem}(t_k) = w_k \cdot q / C_{mem};$$

2) резистор обеспечивает утечку заряда, что приводит к экспоненциальному уменьшению потенциала мембраны

$$\text{для } t_k < t < t_{k+1} \quad V_{mem}(t) = V_{mem}(t_k) \cdot \exp(-(t-t_k)/\tau_M),$$

параметр утечки  $\tau_M = R_{mem} \cdot C_{mem}$  называют еще *периодом релаксации*.

# Локальная (синаптическая) пластичность



*Сравнивается время прихода пре-спайка на синапс пост-нейрона,  $t_{\text{пре}}$ , с временем испускания пост-спайка пост-нейроном,  $t_{\text{пост}}$ :*

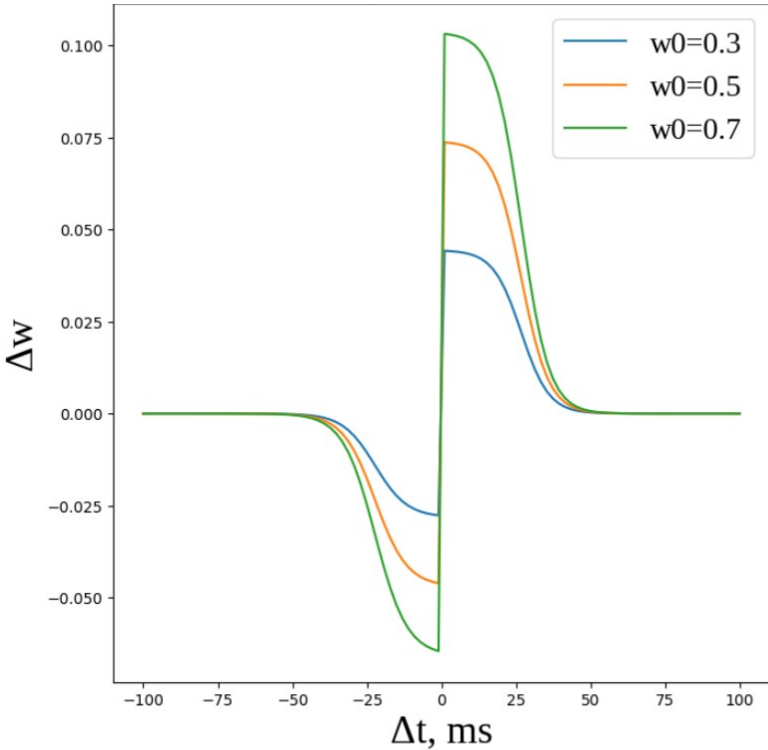
*если  $t_{\text{пост}} - t_{\text{пре}} > 0$ , то вес  $W$  увеличивается; если  $t_{\text{пост}} - t_{\text{пре}} < 0$ , то  $W$  уменьшается*

**Гипотеза 1** - при кратной подаче внешнего сигнала локальная синаптическая пластичность:

- 1) выращивает **глобальные** цепи связей с высокими весами между нейронами;
- 2) подавляет веса других связей.

*Если гипотеза верна, то после подачи сигнала (кратно) распределение синаптических весов в нейронной сети станет **бимодальным** — связи образуют две группы, одна с большими весами и другая с маленькими весами.*

# Локальная пластичность (*STDP – spike timing dependence plasticity*)



$$\Delta w(\Delta t) = \begin{cases} A^+ \cdot w \cdot \left[ 1 + \tanh\left(-\frac{\Delta t - \mu_+}{\tau_+}\right) \right] & \text{при } \Delta t > 0; \\ A^- \cdot w \cdot \left[ 1 + \tanh\left(\frac{\Delta t - \mu_-}{\tau_-}\right) \right] & \text{при } \Delta t < 0; \end{cases}$$

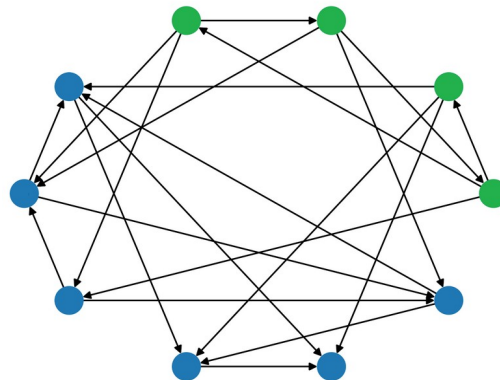
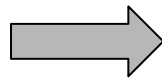
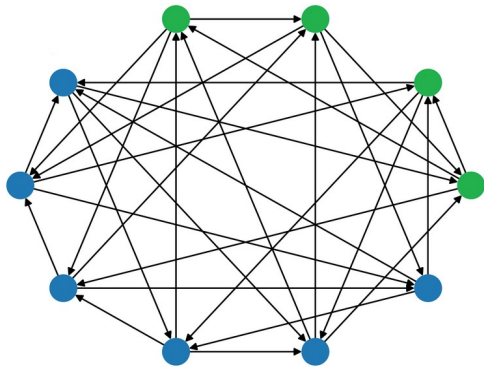
$$\omega = \omega_0 + \Delta\omega \quad \Delta t = t_{post} - t_{pre}$$

$$A^+ = 0.074, A^- = -0.047$$

$$\mu_+ = 26.7 \text{ мс}, \mu_- = -22.3 \text{ мс}$$

$$\tau_+ = 9.3 \text{ мс}, \tau_- = 10.8 \text{ мс}$$

Спайковая нейронная сеть это **ориентированный граф** (*орграф*):  
*нейроны - вершины орграфа,*  
*аксон-синаптические связи — направленные ребра орграфа.*



*Пример орграфа (сети) из 10 вершин (нейронов) и 30 направленных ребер (аксон-синапс).*

*Группа ребер с высокими весами (ор-подграф), образующаяся за счет локальной синаптической пластичности - 10 вершин и 14 ребер. Результат кратной подачи внешнего (спайкового) сигнала.*

**Гипотеза II** - механизм локальной синаптической пластичности каждому внешнему сигналу взаимно-однозначно сопоставляет ор-подграф.

Если гипотеза верна, то мы получим новый механизм **кодирования** внешних **сигналов** в терминах внутренних сетевых структур (**ор-подграфов**).

Необходимое условие для проверки **Гипотезы II:**  
**структурная сложность множества ор-подграфов**  
должна быть не меньше, чем  
**структурная сложность множества сигналов.**

Ориентированные подграфы можно рассматривать как **комплексы путей** в начальном орграфе. *Комплекс путей  $P$  на конечном орграфе  $G$  является набором путей (последовательностей вершин), таких что если путь лежит в  $P$ , то и усечённый путь (удаление первой или последней вершины) также лежит в  $P$ .*

Для таких объектов развит специальный раздел алгебраической топологии, хорошее изложение которого можно найти по ссылкам:

Комплексы путей и их гомологии, А.А. Григорьян, Йонг Лин, Ю.В. Муранов, Шинтан Яу.

Фундаментальная и прикладная математика, 2016, № 21(5), С. 79-128.

Grigor'yan A., Lin Y., Muranov Y., Yau S.T. Homologies of path complexes and digraphs, arXiv:1207.2834, 2012.

Для нас важным является то, что группы гомологий комплексов путей совпадают с симплициальными группами. Таким образом характеристическими структурами орграфов (комплексов путей) могут быть **наборы симплексов разных размерностей и гомологические группы.**

# Вычислительный эксперимент. Модель сигнала.

Квадрат из 4-х бинарных пикселей; черный пиксел - **A**, белый - **B**.  
Всего 16 четырехпиксельных **сигналов**: **VAAA**, **ABAA**, ..., **VBBV**.

Сигнал подается в нейронную сеть в окне размером 20ms:

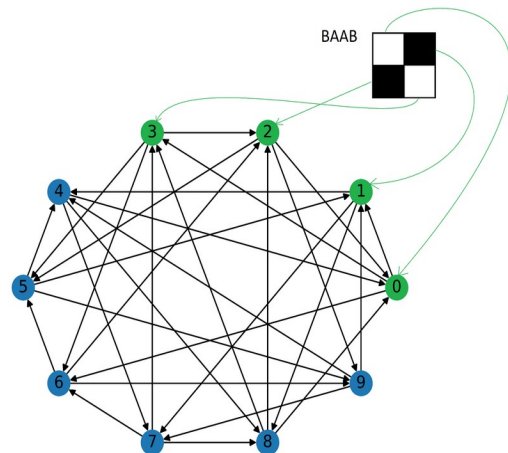
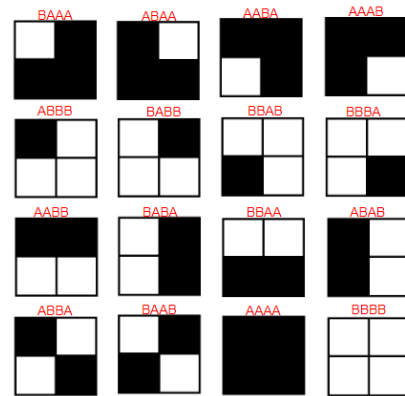
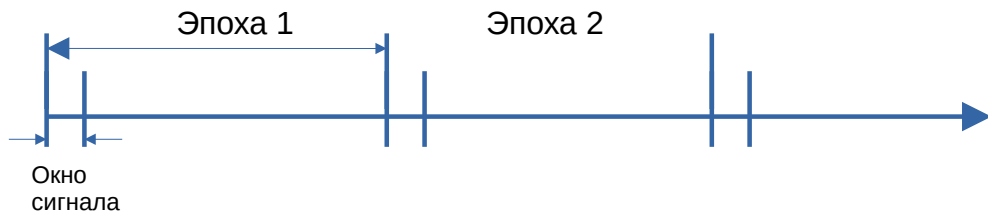
- каждый из 4-х пикселей подается на свой нейрон (номера 0,1,2,3);
- если значение пиксела **A**, то на вход сети подается 4 спайка в моменты времени 2, 7, 12 и 17 ms внутри сигнального окна;
- если значение пиксела **B**, то на вход сети подается 1 спайк в момент времени 10 ms сигнального окна.

Окна подачи сигнала, 20ms, они разделены интервалом 80 ms, вместе интервалы составляют эпоху подачи сигнала длиной 100 ms.

Все веса сети ограничены интервалом [0, 1].

Для каждого сигнала:

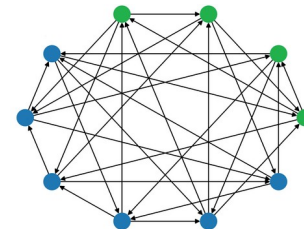
- в начале все веса устанавливаются равными 0.5;
- для достижения бимодального распределения весов эпохи повторяются кратно ( 200 эпох).



# Вычислительный эксперимент. Нейронная сеть

Архитектура сети - *орграф*:

- 10 вершин (нейронов), 30 ребер (синаптических связей);
- у каждой вершины 3 входящих ребра и 3 исходящих;
- нет ребер-петель замыкающихся на одну вершину.

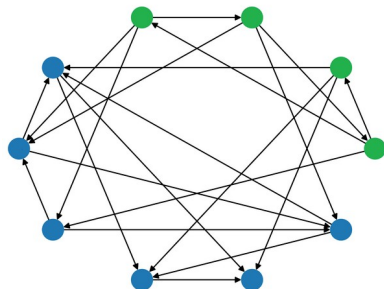


Такая простая архитектура выбрана для возможности визуализации алгебро-топологических структур в сети, как орграфе. Второе условие выше допускает наличие в таких орграфах симплексов до размерности 3 (пирамид), которые можно увидеть взглядом. При этом десять вершин достаточно, чтобы в орграфе были такие симплексы в достаточном количестве для выбранной модели сигнала (слайд выше).

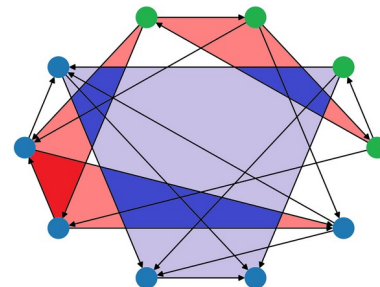
Вершины орграфа соединены ребрами случайно. Мы нашли среди таких орграфов вариант, содержащий 5 трех-мерных симплексов (пирамид) и 7 двух-мерных (треугольников). Как мы увидим далее, алгебро-топологическая сложность каких орграфов достаточна для проверки

## Гипотез 1 и 2.

Пример ор-подграфа, соответствующего одному из 16-ти входных сигналов.



Визуализация симплексов на этом ор-подграфе :  
3-х треугольников и  
1-й пирамиды.





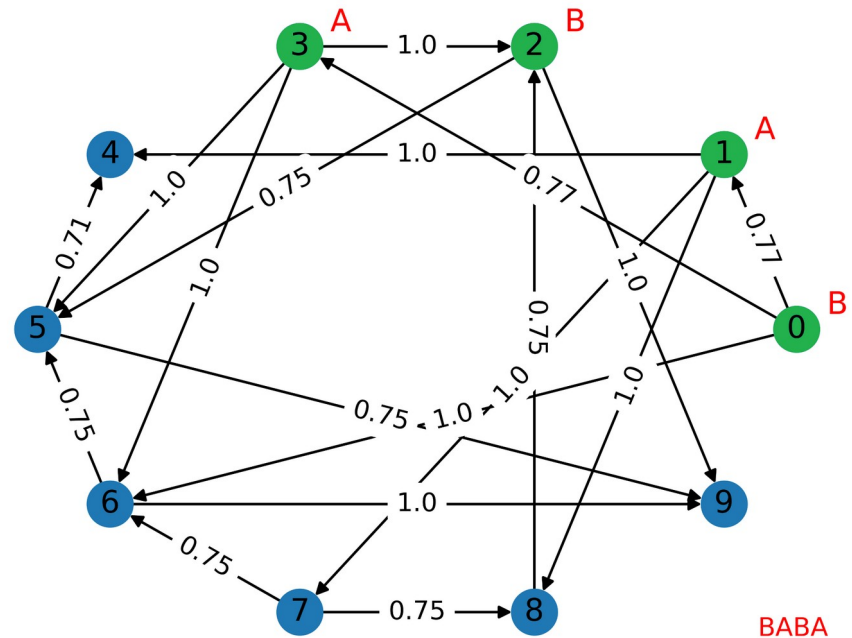
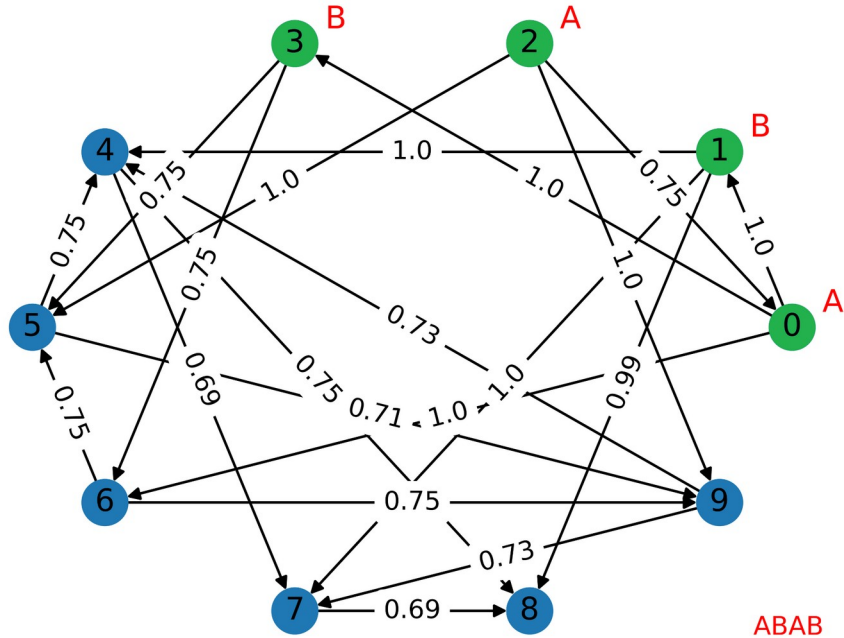


## Сравнение входных сигналов по наборам симплексов

Сигнал	2D симплексы	3D симплексы
<b>ВАВА</b>	<b>6</b>	<b>0</b>
<b>ВААВ</b>	<b>6</b>	<b>1</b>
ВВАА	4	1
ВВВА	8	0
ВВАВ	1	2
<b>ВАВВ</b>	<b>5</b>	<b>3</b>
<b>АВВВ</b>	<b>3</b>	<b>2</b>
ВВВВ	7	1

Сигнал	2D симплексы	3D симплексы
<b>ВАВА</b>	<b>6</b>	<b>0</b>
<b>ВААВ</b>	<b>6</b>	<b>1</b>
ВВАА	4	1
ВВВА	8	0
ВВАВ	1	2
<b>ВАВВ</b>	<b>5</b>	<b>3</b>
<b>АВВВ</b>	<b>3</b>	<b>2</b>
ВВВВ	7	1

# Анализ графов с одинаковым количеством 2D и 3D симплексов

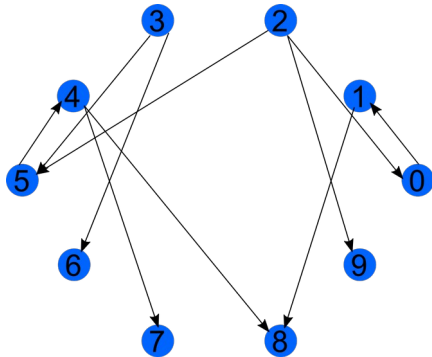


Для сигналов ABAB и BABA для их под-орграфов наборы 2D (треугольники) и 3D (пирамиды) симплексов одинаковы, соответственно 6 и 1.

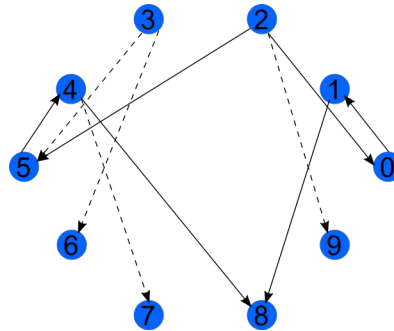
Однако они различаются по наборам **1D симплексов** (ребра).

# Визуализация гомологии под-орграфа сигнала ВВАА

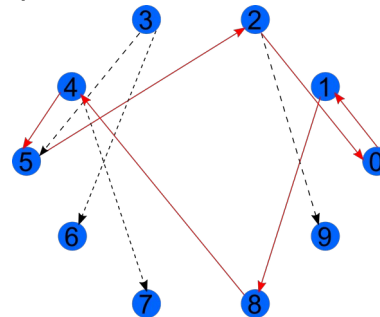
Ор-подграф полученный для сигнала **ВВАА** исключением ребер с весом меньше 0.75



1-мерная гомология (состоит из ребер)



Изображение гомологии (красные ребра) как цикла. Ребра, входящие со знаком “-” в гомологию, поменяли направление.



coeff ребра

<b>1</b>	1-8
<b>-1</b>	2-5
<b>0</b>	2-9
<b>1</b>	2-10
<b>0</b>	3-5
<b>0</b>	3-6
<b>0</b>	4-7
<b>-1</b>	4-8
<b>-1</b>	5-4
<b>1</b>	10-1

# Сравнение ВХОДНЫХ СИГНАЛОВ по 1-dim гомологиям

( $N_c$  число компонент связности,  $N_i$  число ребер)

	$N_c$	$N_1$	$N_2$	$N_3$		$N_c$	$N_1$	$N_2$	$N_3$
BAAA	<b>1</b>	20			AABB	<b>2</b>	19		
ABAA	<b>1</b>	23			BABA	<b>3</b>	13	16	16
AABA	<b>2</b>	17	19		BBAA	<b>1</b>	20		
AAAB	<b>2</b>	19	19		ABAB	<b>3</b>	9	16	16
ABBB	<b>2</b>	17	18		ABBA	<b>1</b>	20		
BABB	<b>1</b>	23			BAAB	<b>1</b>	20		
BBAB	<b>1</b>	15			AAAA	<b>2</b>	19	19	
BBBA	<b>2</b>	18	18		BBBB	<b>2</b>	20	20	

## Заключение ++

**Гипотезы I** и **II** получили подтверждение в вычислительном эксперименте с 4-пиксельными сигналами и спайковой нейронной сетью из 10 нейронов с 30 синаптическими связями:

- I.** в результате кратной подачи сигнала (порядка 10-20 эпох) в сети устанавливается стабильное **бимодальное распределение весов**;
- II.** механизм локальной синаптической пластичности устанавливает **изоморфизм между множеством сигналов и множеством ор-подграфов**.

В результате мы получаем новый механизм кодирования входных (спайковых) сигналов во внутренних терминах спайковой сети - алгебро-топологических характеристик ор-подграфов.

Этот механизм кодирования можно соотносить с **кластеризацией** (стандартная ML операция). При этом в предлагаемом механизме кодирования **нет этапа обучения** (в контексте ML обучения на массивах данных, размеченных экспертом).

В заключение: вспомним необходимое условие для справедливости **Гипотезы II** (слайд 6): *структурная сложность множества ор-подграфов сети должна превышать структурную сложность множества входных сигналов.*

В связи с этим условием заметим, что **увеличение числа нейронов и синаптических связей в сети приведет к неполиномиальному увеличению числа ор-подграфов в сети.**